Есть многочлен:

Тогда:

**…**

То есть , , и т.д. – какие-то многочлены от n переменных. Допустим, можно такие многочлены записать как:

**…**

Но если мы поменяем местами, то есть заменим все и , ничего не поменяется (можно легко проверить, потому что эти многочлены состоят из сочетаний всех переменных по i, где i – номер многочлена “”)

Такие многочлены называются симметрическими.

Симметрические многочлены – многочлены, которые не меняются при произвольной перестановке переменных.

Еще один пример симметрического многочлена:

Как не меняй местами переменные, у нас будут те же самые одночлены.

Симметрические многочлены делятся на:

1. Элементарные. Это именно те, что участвуют в теореме Виетта, то есть описанные выше многочлены из корней многочлена.
2. Другие. То есть все остальные симметрические многочлены.

Обычно элементарные симметрические многочлены обозначают сигмой с индексом:

**…**

## Основная теорема о симметрических многочленах

**Теорема**

Любой симметрический многочлен – это многочлен от элементарных симметрических многочленов

Например, рассмотрим предыдущий неэлементарный симметрический многочлен:

То есть существует такой многочлен, вместо переменных у которого – элементарные симметрические многочлены, который равен симметрическому многочлену F

Базовая форма записи симметрического многочлена: лексикографическая форма: когда у всех одночленов слева идут переменные с наибольшей степенью (их мы и обозначаем первыми по порядку, например, ) после идут переменные со второй наибольшей степенью и т.д. Сортируем одночлены в многочлене мы не по величине степени одночлена, а по степени первых переменных. Если первой переменной нет или у двух одночленов одинаковые степени у таких переменных, смотрим на следующую по порядку переменную и сравниваем по ним.

Типичный вид старшего одночлена:

*,* где … - это остальные одночлены.

Также стоит отметить, что сумма симметрических многочленов – тоже симметрический многочлен, потому что при перестановке переменных сумма не меняется, ведь не меняется одно слагаемое, а также не меняется второе

С разностью то же самое.

**Доказательство основной теоремы:**

У нас есть:

*,* где … - это остальные одночлены. То есть он состоит из старшего одночлена, а также остальных одночленов.

Тогда:

…

=

То есть из элементарных симметрических многочленов мы получили старший одночлен исходного симметрического многочлена, а также набор каких-то других одночленов, которые идут после него (то есть одночлены, которые «младше» старшего одночлена).

Тогда:

Если повторять процесс снова и снова, то в конце концов получим 0, потому что мы постепенно будем удалять старшие члены новых многочленов. А так как мы в элементарных функциях постоянно смотрим по старшим членам, мы никогда не получим в новой функции D новый старший член. То есть у нас одночлены будут все «младше» и «младше», в конечном итоге мы уберем последний младший член.

Тогда можно выразить в виде суммы многочленов D

## p/q теорема

Тогда рациональные корни этого многочлена имеют следующий вид:

***Доказательство:***

Предположим, что – это корень многочлена

Тогда:

Умножим обе части на

Поэтому, если , должен делиться на (потому что все остальные члены делятся на , а должен делиться на, так как все остальные члены делятся на